

УДК 517.5

Е.А. Севостьянов

Є.О. Севостьянов

E.A. Sevost'yanov

Институт прикладной математики и механики НАН Украины, Донецк

Інститут прикладної математики і механіки НАН України, Донецьк

Institute of Applied Mathematics and Mechanics of NAS of Ukraine, Donetsk

Аналог теоремы Монтеля для отображений класса Соболева с конечным искажением

Аналог теоремы Монтеля для відображень класу Соболева зі скінченним спотворенням

Analog of Montel theorem for mappings of Sobolev class with finite distortion

Настоящая работа посвящена изучению классов отображений с неограниченной характеристикой квазиконформности. Получен результат о нормальности семейств открытых дискретных отображений $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ класса $W_{loc}^{1,1}$, имеющих конечное искажение и не принимающих два фиксированных значения $a \neq b$ в \mathbb{C} , максимальная дилатация которых имеет мажоранту конечного среднего колебания в каждой точке. Указанный результат справедлив, в частности, для так называемых Q -отображений и является аналогом известной теоремы Монтеля для аналитических функций.

Дану роботу присвячено вивченню класів відображень з необмеженою характеристикою квазиконформності. Отримано результат про нормальність сімей відкритих дискретних відображень $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ класу $W_{loc}^{1,1}$, що мають скінченне спотворення і не приймають принаймні два фіксованих значення $a \neq b$ в \mathbb{C} , максимальна дилатація котрих має мажоранту скінченного середнього коливання в кожній точці. Вказаний результат є справедливим, зокрема, для так званих Q -відображень і є аналогом відомої теорему Монтеля для аналітичних функцій.

The present paper is devoted to the study of classes of mappings with non-bounded characteristic of quasiconformality. It is obtained a result on normal families of the open discrete mappings $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ of the class $W_{loc}^{1,1}$ having a finite distortion and omitting two fixed values $a \neq b$ in \mathbb{C} , maximal dilatations of which has a majorant of the class of finite mean oscillation at every point. In particular, the result mentioned above holds for the so-called Q -mappings and is an analog of known Montel theorem for analytic functions.

1. Введение. Настоящая заметка посвящена обобщению одного аналога известной теоремы Монтеля о нормальности семейств аналитических функций (см. [1, § 32, гл. II]). Ввиду этой теоремы, как известно, семейство $\mathfrak{F}_{a,b}(D)$ аналитических функций $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ области $D \subset \mathbb{C}$ является нормальным при всяких фиксированных значениях $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$ (см. там же). Как оказалось, указанный результат остаётся также справедливым и для более общих классов открытых дискретных отображений класса Соболева $W_{loc}^{1,1}$ с конечным искажением, как только так называемая дилатация $K_\mu(z)$ этих отображений удовлетворяет некоторым (достаточно общим) ограничениям на рост.

Более того, следует отметить, что указанный результат справедлив также для так называемых Q -отображений, исследованных автором ранее (см., напр., [2, раздел 5]). Одно из сформулированных в данной работе утверждений по этому поводу усиливает более ранние результаты о нормальности семейств Q -отображений, не принимающих значения множества E положительной конформной ёмкости. Вместо этого в настоящей заметке предлагается ограничиться лишь двуточечным множеством E комплексной плоскости. Следует также отметить, что здесь речь идёт лишь о случае размерности пространства \mathbb{R}^n при $n = 2$, поскольку случаи больших размерностей требуют иных подходов нежели те, что рассмотрены ниже.

Приведём необходимые определения и обозначения. Всюду далее m – мера Лебега в \mathbb{C} , D – область в \mathbb{C} , $\overline{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ – одноточечная компактификация \mathbb{C} .

Для открытого множества $U \subset \mathbb{C}$ символом $C_1^0(U)$, как обычно, обозначается множество всех непрерывно дифференцируемых в U функций с компактным носителем в U . Пусть $u : U \rightarrow \mathbb{R}$ – некоторая функция, $u \in L_{loc}^1(U)$, $z = x_1 + ix_2$, $z \in \mathbb{C}$. Предположим, что найдётся функция $v \in L_{loc}^1(U)$, такая что

$$\int_U \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(z) u(z) dm(z) = - \int_U \varphi(z) v(z) dm(z)$$

для любой функции $\varphi \in C_1^0(U)$. Тогда будем говорить, что функция v является *обобщённой производной первого порядка функции u по переменной x_i* и обозначать символом: $\frac{\partial u}{\partial x_i}(z) := v$. Функция $u \in W_{loc}^{1,1}(U)$, если u имеет обобщённые производные первого порядка по каждой из переменных в U , которые являются локально интегрируемыми в U .

Пусть G – открытое множество в \mathbb{C} . Отображение $f : G \rightarrow \mathbb{C}$ принадлежит *классу Соболева* $W_{loc}^{1,1}(G)$, пишут $f \in W_{loc}^{1,1}(G)$, если его координатные функции f_k , $k = 1, 2$, $f(z) = f_1(z) + if_2(z)$, обладают обобщёнными частными производными первого порядка, которые локально интегрируемы в G в первой степени. Если $f \in W_{loc}^{1,1}(G)$, то *матрицу Якоби* $f'(z)$ отображения f в точке z определим как матрицу (2×2) , составленную из формальных частных производных по Соболеву (в i -й строке и j -м столбце располагается элемент $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)$). Стоит отметить, что в почти всех точках дифференцируемости $z \in G$

элементы $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)$, понимаемые в указанном выше смысле, совпадают с обычной частной производной функции f_i по переменной x_j , также обозначаемой символом $\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(z)$, если невозможно недоразумение (см. [3, теорема 1, п. 1.1.3, § 1.1, гл. I]). Отметим также, что всякое отображение $f \in W_{loc}^{1,1}(G)$ почти всюду имеет обычные частные производные по каждой из переменных (см. там же).

Для комплекснозначной функции $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, заданной в области $D \subset \mathbb{C}$, имеющей частные производные по x и y при почти всех $z = x+iy$, полагаем $\bar{\partial}f = f_{\bar{z}} = (f_x + if_y)/2$ и $\partial f = f_z = (f_x - if_y)/2$. Полагаем $\mu(z) = \mu_f(z) = f_{\bar{z}}/f_z$, при $f_z \neq 0$ и $\mu(z) = 0$ в противном случае. Указанная комплекснозначная функция μ называется *комплексной дилатацией* отображения f в точке z . *Максимальной дилатацией* отображения f в точке z называется следующая функция:

$$K_{\mu_f}(z) = K_{\mu}(z) = \frac{1 + |\mu(z)|}{|1 - |\mu(z)||}. \quad (1)$$

Заметим, что $J(f, z) = |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2$, где $J(f, z) := \det f'(z)$, что может быть проверено прямым подсчётом (см., напр., [4, пункт С, гл. I]).

Отображение $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ называется *отображением с конечным искажением*, если $f \in W_{loc}^{1,1}(D)$ и для некоторой функции $K(z) : D \rightarrow [1, \infty)$ выполнено условие

$$\|f'(z)\|^2 \leq K(z) \cdot |J(f, z)|$$

при почти всех $z \in D$, где $\|f'(z)\| = |f_z| + |f_{\bar{z}}|$ (см. [5, п. 6.3, гл. VI]). Суть понятия отображения с конечным искажением заключается в том, что у указанного отображения f матричная норма производной $\|f'(z)\|$ равна нулю в почти всех точках вырождения якобиана $J(f, z)$.

Пусть (X, d) и (X', d') – метрические пространства с расстояниями d и d' соответственно. Семейство \mathfrak{F} непрерывных отображений $f : X \rightarrow X'$ называется *нормальным*, если из любой последовательности отображений $f_m \in \mathfrak{F}$ можно выделить подпоследовательность f_{m_k} , которая сходится локально равномерно в X к непрерывной функции $f : X \rightarrow X'$. Отметим, что всюду далее, если не оговорено противное, $(X, d) = (D, |\cdot|)$, где D – область в \mathbb{C} , а $|\cdot|$ – евклидова метрика, $|x - y| = \sqrt{\sum_{i=1}^2 (y_i - x_i)^2}$, где $x = x_1 + ix_2$, $y = y_1 + iy_2$; $(X', d') = (\overline{\mathbb{C}}, h)$, где h – хордальная метрика,

$$h(x, \infty) = \frac{1}{\sqrt{1 + |x|^2}}, \quad h(x, y) = \frac{|x - y|}{\sqrt{1 + |x|^2} \sqrt{1 + |y|^2}}, \quad x \neq \infty \neq y.$$

Определение и примеры функций $\varphi : D \rightarrow \mathbb{R}$ класса $FMO(z_0)$, $z_0 \in \mathbb{C}$, являющихся обобщением класса BMO , см., напр., в работе [6]. Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – измеримая по Лебегу функция, тогда $q_{z_0}(r)$ означает среднее интегральное значение $Q(x)$ над

окружностью $|z - z_0| = r$,

$$q_{z_0}(r) := \frac{1}{2\pi r} \int_{|z-z_0|=r} Q(z) d\mathcal{H}^1, \quad (2)$$

где \mathcal{H}^1 – 1-мерная мера Хаусдорфа.

Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, чисел $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, и измеримой по Лебегу функции $Q : D \rightarrow [0, \infty]$, обозначим символом $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ класса $W_{loc}^{1,1}(D)$ и имеющих конечное искажение, таких что $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ при почти всех $z \in D$. Один из основных результатов настоящей работы может быть сформулирован следующим образом.

Теорема 1. Семейство отображений $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ является нормальным, как только выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий: 1) $Q \in FMO(z_0)$ в каждой точке $z_0 \in D$; 2) $q_{z_0}(r) \leq C(z_0) \cdot \log \frac{1}{r}$ при $r \rightarrow 0$ и каждой точке $z_0 \in D$, где $C(z_0) > 0$ – некоторая постоянная; 3) $Q \in L_{loc}^1(D)$ и при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ имеет место соотношение

$$\int_0^{\varepsilon_0} \frac{dt}{tq_{z_0}(t)} = \infty. \quad (3)$$

Приведём ещё результат по этому поводу. Далее M обозначает конформный модуль семейства кривых (см., напр., [7, разд. 6, гл. II]). Пусть $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ – некоторая фиксированная вещественнозначная функция. Согласно [8, гл. 4], отображение $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ условимся называть Q -отображением, если f удовлетворяет соотношению

$$M(f(\Gamma)) \leq \int_D Q(z) \cdot \rho^2(z) dm(z)$$

для произвольного семейства кривых Γ в области D и каждой допустимой функции $\rho \in \text{adm } \Gamma$. (Определение условия допустимости $\rho \in \text{adm } \Gamma$ функции ρ см. в [7, гл. II]). В частности, если f – гомеоморфизм, будем называть такое отображение Q -гомеоморфизмом.

Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, чисел $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq b$, и измеримой по Лебегу функции $B : D \rightarrow [0, \infty]$, обозначим символом $\mathfrak{G}_{a,b,B}^*(D)$ семейство всех открытых дискретных Q -отображений $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{a, b\}$ таких, что $Q(z) \leq B(z)$ при почти всех $z \in D$. Имеет место следующее

Следствие 1. Семейство отображений $\mathfrak{G}_{a,b,B}^*(D)$ является нормальным, как только выполнено, по крайней мере, одно из следующих условий: 1) $B \in FMO(z_0)$ в каждой точке $z_0 \in D$; 2) $b_{z_0}(r) \leq C(z_0) \cdot \log \frac{1}{r}$ при $r \rightarrow 0$ и каждой точке $z_0 \in D$, где $C(z_0) > 0$ – некоторая постоянная, а $b_{z_0}(r)$ – среднее значение функции $B(z)$ над окружностью $S(z_0, r)$; 3) $B \in L_{loc}^1(D)$ и при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ имеет место соотношение (3), где

вместо $q_{z_0}(r)$ следует взять $b_{z_0}(r)$ – среднее значение функции $B(z)$ над окружностью $S(z_0, r)$.

3. Формулировка и доказательство основной леммы. Докажем, прежде всего, следующее утверждение.

Лемма 1. Пусть $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ – отображение с конечным искажением, $f \in W_{loc}^{1,1}$, имеющее вид $f = \varphi \circ g$, где g – некоторый гомеоморфизм, а φ – аналитическая функция. Тогда также $g \in W_{loc}^{1,1}$ и, кроме того, g имеет конечное искажение.

Доказательство. Пусть $f = \varphi \circ g$, где g – некоторый гомеоморфизм, а φ – аналитическая функция, при этом, $f \in W_{loc}^{1,1}$ и f имеет конечное искажение. Отметим, что множество точек ветвления $B_\varphi \subset g(D)$ функции φ состоит только из изолированных точек (см. [9, пункты 5 и 6 (II), гл. V]). Следовательно, $g(z) = \varphi^{-1} \circ f$ локально, вне множества $g^{-1}(B_\varphi)$. Ясно, что множество $g^{-1}(B_\varphi)$ также состоит из изолированных точек, следовательно, $g \in ACL(D)$ как композиция аналитической функции φ^{-1} и отображения $f \in W_{loc}^{1,1}(D)$.

Покажем, что $g \in W_{loc}^{1,1}(D)$. Пусть далее $\mu_f(z)$ означает комплексную дилатацию функции $f(z)$, а $\mu_g(z)$ – комплексную дилатацию g . Согласно [4, (1), п. С, гл. I] для почти всех $z \in D$ получаем:

$$f_z = \varphi_z(g(z))g_z, \quad f_{\bar{z}} = \varphi_z(g(z))g_{\bar{z}},$$

$$\mu_f(z) = \mu_g(z) =: \mu(z), \quad K_{\mu_f}(z) = K_{\mu_g}(z) := K_\mu(z) = \frac{1 + |\mu|}{1 - |\mu|}.$$

Таким образом, $K_\mu(z) \in L_{loc}^1(D)$. Поскольку f – конечного искажения, g также конечного искажения и при почти всех $z \in D$ выполнены соотношения

$$|\partial g| \leq |\partial g| + |\bar{\partial} g| = K_\mu^{1/2}(z)(|J(f, z)|)^{1/2},$$

откуда по неравенству Гёльдера $|\partial g| \in L_{loc}^1(D)$ и $|\bar{\partial} g| \in L_{loc}^1(D)$. Следовательно, $g \in W_{loc}^{1,1}(D)$ и g имеет конечное искажение. \square

Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, числа $c \in \mathbb{C}$ и измеримой по Лебегу функции $Q : D \rightarrow [0, \infty]$ обозначим символом $\mathfrak{H}_{c,Q}(D)$ семейство всех гомеоморфизмов $f : D \rightarrow \mathbb{C} \setminus \{c\}$ класса $W_{loc}^{1,1}(D)$ и имеющих конечное искажение, таких что $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ при почти всех $z \in D$. Для установления основных результатов настоящей работы приведём также следующее утверждение.

Лемма 2.

1. Класс $\mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ образует нормальное семейство отображений, как только функция Q удовлетворяет одному из следующих условий: 1) $Q \in FMO(z_0)$ в каждой точке $z_0 \in D$; 2) $q_{z_0}(r) \leq C(z_0) \cdot \log \frac{1}{r}$ при $r \rightarrow 0$ и каждой точке $z_0 \in D$, где $C(z_0) > 0$ – некоторая постоянная; 3) при некотором $\varepsilon_0 = \varepsilon_0(z_0)$ имеет место соотношение (3). Нормальность необходимо интерпретировать в смысле хордальной метрики h .

2. Если последовательность $f_n : D \rightarrow \mathbb{C}$, $f_n \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$, сходится локально равномерно в D к отображению $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$ в смысле метрики h , и, кроме того, функция Q удовлетворяет хотя бы одному из указанных выше условий 1)–3), то f либо – гомеоморфизм $f : D \rightarrow \mathbb{C}$, либо – постоянная $f : D \rightarrow \overline{\mathbb{C}}$.

Доказательство. Пусть $f_m \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ – произвольная последовательность, тогда комплексная дилатация $\mu_{f_m}(z)$ отображения $f_m \in \mathfrak{H}_{a,Q}(D)$ удовлетворяет следующему условию: $|\mu_{f_m}(z)| \neq 1$ п.в., поскольку по условию леммы f_m – конечного искажения. Поскольку f_m – гомеоморфизмы, то либо $|\mu_{f_m}(z)| > 1$ п.в. (что соответствует случаю $J(f_m, z) < 0$ п.в.), либо $|\mu_{f_m}(z)| < 1$ п.в. (что соответствует случаю $J(f_m, z) > 0$ п.в.); см., напр., [10, разд. V.2.2, соотношение (68), с. 332] либо [11, лемма 2.14 и комментарии после леммы 2.11]. Не ограничивая общности рассуждений, можно считать, что $|\mu_{f_m}(z)| < 1$ почти всюду (например, рассмотрев для отображений f_m , для которых $|\mu_{f_m}(z)| > 1$, вспомогательное семейство $\psi_m = \psi \circ f_m$, где $\psi(z) = x - iy$, $z = x + iy$). В таком случае, 1-я часть заключения леммы 2 есть прямое следствие результатов работы [12, теоремы 5.1, 5.2 и следствие 5.3].

Вторая часть утверждения леммы вытекает на основании [12, лемма 3.1] и [14, теоремы 4.1–4.2] (см. также [13, теорема 5.3, разд. 5.3, гл. 5 и теоремы 1.3, 1.4, следствие 1.8, разд. 1.5, гл. 1]). \square

4. Доказательство основных результатов. Доказательство теоремы 1 основано на так называемом представлении Стоилова. Пусть $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ – произвольная последовательность отображений семейства $\mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$, тогда согласно представлению Стоилова [9, п. 5 (III), гл. V] каждое отображение $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ имеет вид $f_m = \varphi_m \circ g_m$, где g_m – некоторый гомеоморфизм, а φ_m – аналитическая функция.

Пусть z_1, z_2 – две произвольные различные точки области D . Рассмотрим отображения

$$\Psi_m(z) = z - g_m(z_1), \quad \psi_m(z) = \frac{z}{|g_m(z_2) - g_m(z_1)|} e^{-i \arg(g_m(z_2) - g_m(z_1))},$$

тогда

$$f_m(z) = \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \Psi_m \circ g_m(z) = \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \psi_m^{-1} \circ \psi_m \circ \Psi_m \circ g_m(z).$$

Обозначая через

$$A_m(w) := \varphi_m \circ \Psi_m^{-1} \circ \psi_m^{-1}(w)$$

и

$$B_m(z) = \psi_m \circ \Psi_m \circ g_m(z) = \frac{g_m(z) - g_m(z_1)}{|g_m(z_2) - g_m(z_1)|} e^{-i \arg(g_m(z_2) - g_m(z_1))},$$

мы видим, что $f_m(z) = A_m \circ B_m(z)$, где A_m – аналитические функции и B_m – гомеоморфизмы, удовлетворяющие условиям $B_m(z_1) = 0$, $B_m(z_2) = 1$. Стоит отметить, что ввиду леммы 1 семейство гомеоморфизмов $\{B_m\}_{m=1}^{\infty}$ принадлежит классу $\mathfrak{H}_{0,Q}(D \setminus \{z_1\})$ (см. обозначения леммы 2), а также классу $\mathfrak{H}_{1,Q}(D \setminus \{z_2\})$. Тогда ввиду первой части леммы 2 семейство отображений B_m является нормальным семейством отображений как в

$D \setminus \{z_1\}$, так и в $D \setminus \{z_2\}$. Поскольку произвольный компакт $C \subset D$ может быть представлен в виде объединения $C = C_1 \cup C_2$, где C_1 – компакт в $D \setminus \{z_1\}$ и C_2 – компакт в $D \setminus \{z_2\}$, то отсюда следует, что B_m также образует нормальное семейство отображений в области D .

Итак, пусть $h(B_{m_k}(x), B(x)) \rightarrow 0$ при $m \rightarrow \infty$ локально равномерно в D , где B – некоторое непрерывное отображение. Тогда, в силу условий $B_{m_k}(z_1) = 0$, $B_{m_k}(z_2) = 1$ и ввиду второй части леммы 2 отображение B является гомеоморфизмом из D в \mathbb{C} .

Заметим, что $B(D) \subset B_{m_k}(D)$ при всех $k \geq K_0$ и некотором $K_0 \in \mathbb{N}$ (см. [13, предложение 1.5, гл. 1]). В таком случае, все отображения A_{m_k} определены в области $B(D)$. Отметим, что в этой области каждое отображение A_{m_k} не может принимать ни значение a , ни значение b , поскольку, в противном случае, и сами отображения f_{m_k} принимали бы всё те же значения, что противоречит условию теоремы. В таком случае, семейство отображений A_{m_k} является нормальным ввиду теоремы Монтеля о нормальности семейств аналитических функций, не принимающих пару комплексных значений (см. [1, § 32, гл. II]).

Пусть $A_{m_{k_l}}$ – последовательность аналитических функций, являющаяся подпоследовательностью последовательности A_{m_k} , сходящаяся локально равномерно в $B(D)$ при $l \rightarrow \infty$ к аналитической функции (либо – тождественной бесконечности), которую мы обозначим через $A(x)$. Пусть C – произвольный компакт в области D , тогда ввиду локально равномерной сходимости B_{m_k} к отображению B все точки $B_{m_{k_l}}(x)$ лежат внутри некоторого компакта $C_1 \subset B(D)$ при всех $x \in C$ и всех $l \geq K_1 \in \mathbb{N}$. Тогда при тех же x и l будем иметь:

$$\begin{aligned} h(A_{m_{k_l}} \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)) &\leq \\ h(A_{m_{k_l}} \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B_{m_{k_l}}(x)) + h(A \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)) &\leq \\ \sup_{y \in C_1} h(A_{m_{k_l}}(y), A(y)) + h(A \circ B_{m_{k_l}}(x), A \circ B(x)) &\rightarrow 0 \end{aligned}$$

при $l \rightarrow \infty$ равномерно по $x \in C$. Таким образом, последовательность $f_m \in \mathfrak{G}_{a,b,Q}(D)$ имеет подпоследовательность, сходящуюся локально равномерно в D . \square

Доказательство следствия 1 вытекает из того, что семейство $\mathfrak{G}_{a,b,B}^*(D)$ является подклассом семейства $\mathfrak{G}_{a,b,B}(D)$ при указанных условиях на функцию B . Действительно, $\mathfrak{G}_{a,b,B}^*(D) \subset W_{loc}^{1,1}$ и каждое $f \in \mathfrak{G}_{a,b,B}^*(D)$ имеет конечное искажение ввиду [15, следствия 3.3 и 3.5], кроме того, $K_\mu(z) \leq Q(z)$ почти всюду ввиду [15, следствие 3.2]. \square

5. О компактности классов Соболева. Для фиксированных области $D \subset \mathbb{C}$, чисел $a, b \in D$, $a \neq b$, $a', b' \in \mathbb{C}$, $a' \neq b'$, и измеримой по Лебегу функции $Q : D \rightarrow [0, \infty]$, обозначим символом $\mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$ семейство всех открытых дискретных отображений $f : D \rightarrow \mathbb{C}$ класса $W_{loc}^{1,1}(D)$ и имеющих конечное искажение, таких что $f(a) = a'$, $f(b) = b'$ и $K_{\mu_f}(z) \leq Q(z)$ при почти всех $z \in D$. Справедливо следующее утверждение.

Теорема 2. Класс $\mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$ является компактным (т.е., нормальным и замкнутым семейством отображений в топологии локально равномерной сходимости).

Доказательство. Заметим, что семейство отображений является нормальным ввиду теоремы 1. Более того, повторяя доказательство этой теоремы, мы приходим к заключению, что произвольная сходящаяся последовательность f_m представима в виде композиции $f_m = A_m \circ B_m$, где B_m – последовательность гомеоморфизмов, сходящаяся локально равномерно к гомеоморфизму B , а A_m – последовательность аналитических функций, сходящаяся к аналитической функции A . При этом, $f_m \rightarrow f := A \circ B$. Осталось показать, что $f \in \mathfrak{A}_{a,b,a',b',Q}(D)$.

Заметим, что условия нормировки $f_m(a) = a'$, $f_m(b) = b'$ исключают возможность, когда A является постоянной функцией. Значит, f дискретно и открыто. Кроме того, ввиду леммы 1 заключаем, что $B_m \in W_{loc}^{1,1}$, B_m имеют конечное искажение и $K_{\mu_{B_m}}(z) = K_{\mu_{f_m}}(z)$. Ввиду теорем [14, 17.1–17.2] предельное отображение B также принадлежит классу $W_{loc}^{1,1}$, имеет конечное искажение и его максимальная дилатация $K_{\mu_B}(z)$ не превосходит $Q(z)$ почти всюду. Тогда, очевидно, $f = A \circ B \in W_{loc}^{1,1}$ и $K_{\mu_f}(z) \neq Q(z)$. Равенства $f(a) = a'$ и $f(b) = b'$ элементарно получаются предельным переходом по m из равенств $f_m(a) = a'$ и $f_m(b) = b'$. Теорема доказана. \square

Список литературы

- [1] *Монтель П.* Нормальные семейства аналитических функций. – Москва, Ленинград: Объединённое научно-техническое издательство НКТП СССР, Главная редакция научно-технической литературы и номографии, 1936.
- [2] *Севостьянов Е.А.* Теория модулей, ёмкостей и нормальные семейства отображений, допускающих ветвление // Украинский матем. вестник. – 2007. – 4, № 4. – С. 582–604.
- [3] *Мазья В.Г.* Пространства Соболева. – Ленинград: Издательство ленинградского университета, 1985.
- [4] *Альфорт Л.* Лекции по квазиконформным отображениям. – Москва: Мир, 1969.
- [5] *Iwaniec T., Martin G.* Geometrical Function Theory and Non-Linear Analysis. – Oxford: Clarendon Press, 2001.
- [6] *Игнатъев А., Рязанов В.* Конечное среднее колебание в теории отображений // Укр. матем. вестник. – 2005. – 2, № 3. – С. 395–417.
- [7] *Väisälä J.* Lectures on n -Dimensional Quasiconformal Mappings. – Lecture Notes in Math. 229, Berlin etc.: Springer-Verlag, 1971.
- [8] *Martio O., Ryazanov V., Srebro U. and Yakubov E.* Moduli in Modern Mapping Theory. – New York: Springer Science + Business Media, LLC, 2009.
- [9] *Стоилов С.* Лекции о топологических принципах теории аналитических функций. – Наука, Москва, 1964.

- [10] *Rado T. and Reichelderfer P.V.* Continuous Transformations in Analysis. – Springer–Verlag, Berlin etc., 1955.
- [11] *Martio O., Rickman S., Väisälä J.* Definitions for quasiregular mappings // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A1. – 1969. – V. 448. – P. 1–40.
- [12] *Lomako T., Salimov R., Sevost'yanov E.* On equicontinuity of solutions to the Beltrami equations // Ann. Univ. Bucharest (math. series). – 2010. – V. LIX, no. 2. – P. 261–271.
- [13] *Ковтонюк Д.А., Салимов Р.Р. и Севостьянов Е.А.* К теории отображений классов Соболева и Орлича-Соболева. – Наукова думка: Киев, 2013.
- [14] *Ryazanov V., Salimov R., Sevost'yanov E.* On Convergence Analysis of Space Homeomorphisms // Siberian Advances in Mathematics. – 2013. – V. 23, no. 4. – P. 263–293.
- [15] *Салимов Р.Р., Севостьянов Е.А.* Теория кольцевых Q -отображений в геометрической теории функций // Матем. сборник. – 2010. – Т. 201, № 6. – С. 131–158.

Евгений Александрович Севостьянов

Институт прикладной математики и механики НАН Украины

83 114 Украина, г. Донецк, ул. Розы Люксембург, д. 74,

тел. +38 (066) 959 50 34 (моб.), +38 (062) 311 01 45 (раб.), e-mail: brusin2006@rambler.ru, esevostyanov2009@mail.ru